

モデルベース初心者向け勉強会：設計と実践

実例紹介：プラントモデリングのコツを教えます 現代制御理論を使った制御系設計

MathWorks Japan アプリケーションエンジニアリング部

Agenda

1. MBDとは？
2. 実例紹介：プラントモデリングのコツを教えます
3. 現代制御理論を使った制御系設計
4. 自動コード生成と、マイコンへの機能実装について解説

Agenda

1. MBDとは？
2. 実例紹介：プラントモデリングのコツを教えます
3. 現代制御理論を使った制御系設計
4. 自動コード生成と、マイコンへの機能実装について解説

本セッションでお話する内容

目的

モデルベースデザインを通じた制御系設計を行うために必要なプラント（倒立振子）の数式モデルならびにパラメーターを得る

アウトプット

- プラント（倒立振子）の支配的要素を再現した数理モデル
- プラントモデルのパラメーター

要求

システム
設計

機能
設計

SW
基本設計

SW
詳細設計

メカ

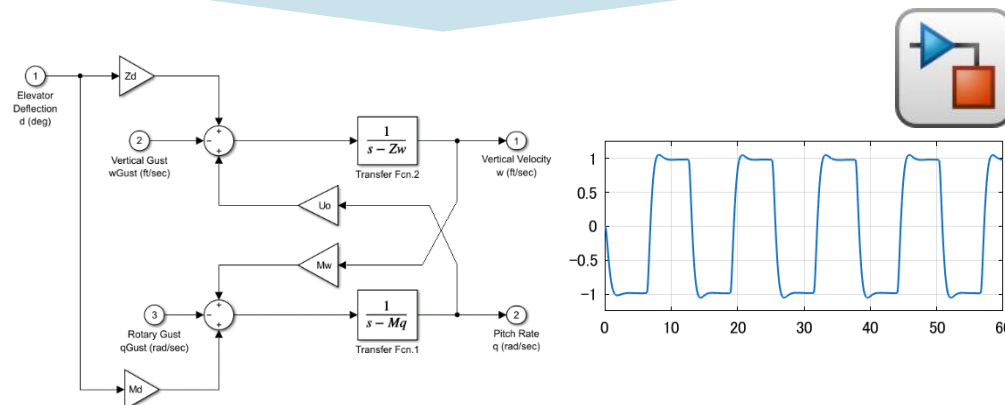
エレキ

ソフト

量産コード自動生成

プラントモデリングとは？

宇宙機、航空機、車両、船舶、ロボット、モーター etc といった様々な現実の物理対象を机上のバーチャル環境で構築し、シミュレーションによって用途に応じた解析や設計、評価を行えるようにする

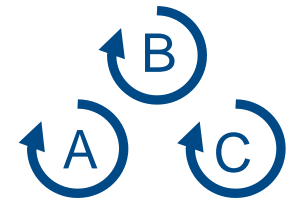


なぜプラントモデリングが必要なのか？

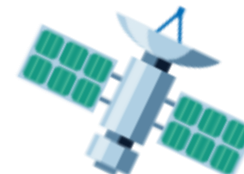
- ✓ 実機を試作する前にシミュレーションで勘所を抑えたい



- ✓ 制御に用いるアルゴリズムの性能を手早く確かめたい



- ✓ 実機では検証が難しい内容をシミュレーションで評価したい

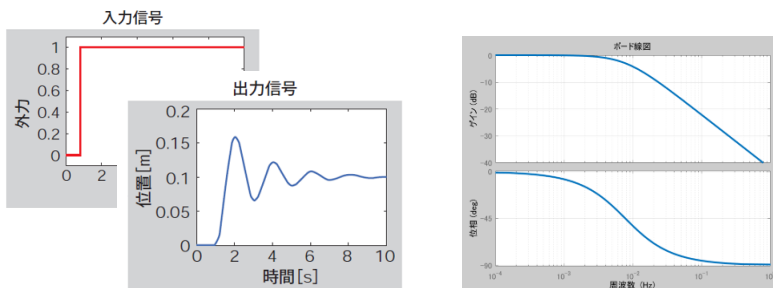
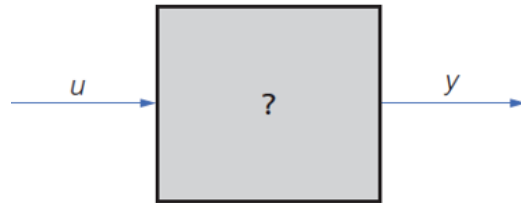


モデリングのパターン

ブラックボックス

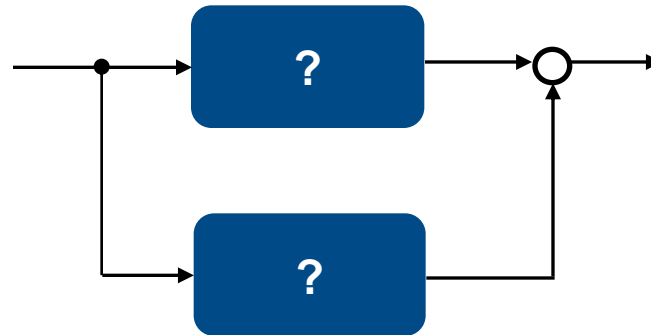
グレーボックス

ホワイトボックス



- データから推定
- 対象のドメイン知識を必ずしも前提としない

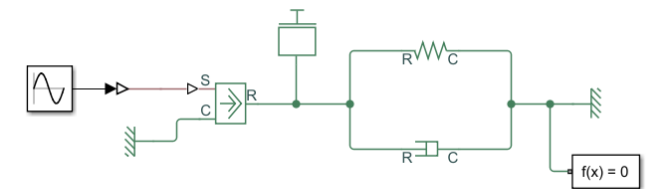
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} ? & a \\ b & ? \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} u$$



- ホワイトとブラックの中間にあるモデリング

$$F = ma \quad V = RI$$

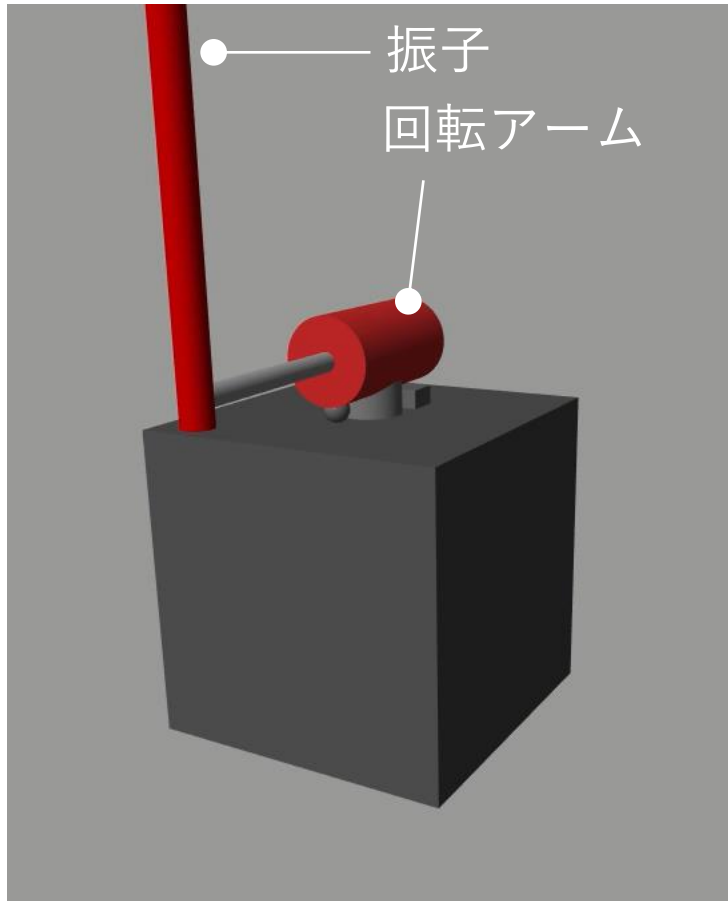
$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$



- 物理式、原理式ベース
- 対象のドメイン知識が必須

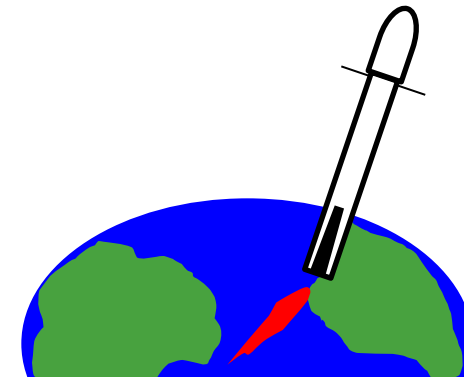
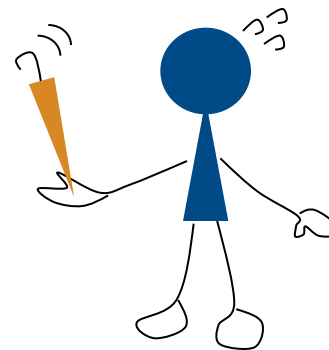
第一原理モデリングを使ったプラントモデリング

今回の題材は、



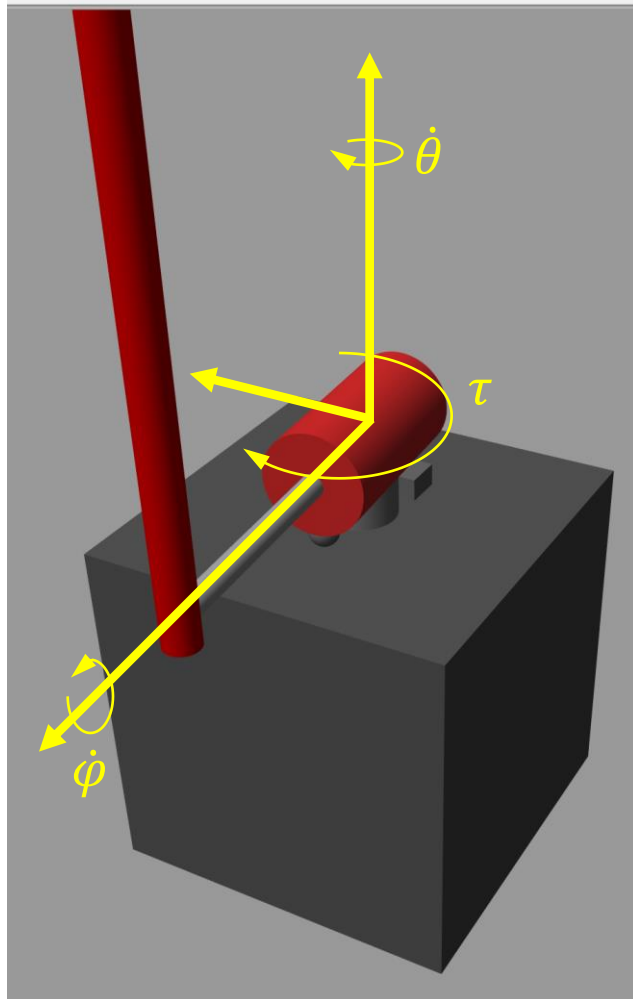
回転型倒立振子

- 回転アーム部を適切に制御して、アーム先端に接続する振子を倒立させる
- 制御のベンチマーク的な問題
- 非線形な特性を有す
- 東京工業大学名誉教授 古田勝久先生 考案
別名 *Furuta's Pendulum*



回転型倒立振子の理解

座標の定義



観測量（出力）

θ : 回転アームの回転角 [rad]

ϕ : 振子の回転角 [rad]

※回転及びトルクの正方向は図示

※ θ はテーブルが真正面を向いているとき0[rad]とする

※ ϕ は振子が真下にあるとき0[rad]とする

入力

τ : 回転アームに与える回転トルク [Nm]

運動の流れ

τ を入力 ➡ $\dot{\theta}$ が発生 ➡ θ が変化 ➡ $\dot{\phi}$ が発生 ➡ ϕ が変化

運動方程式の考え方

～運動方程式の立式～

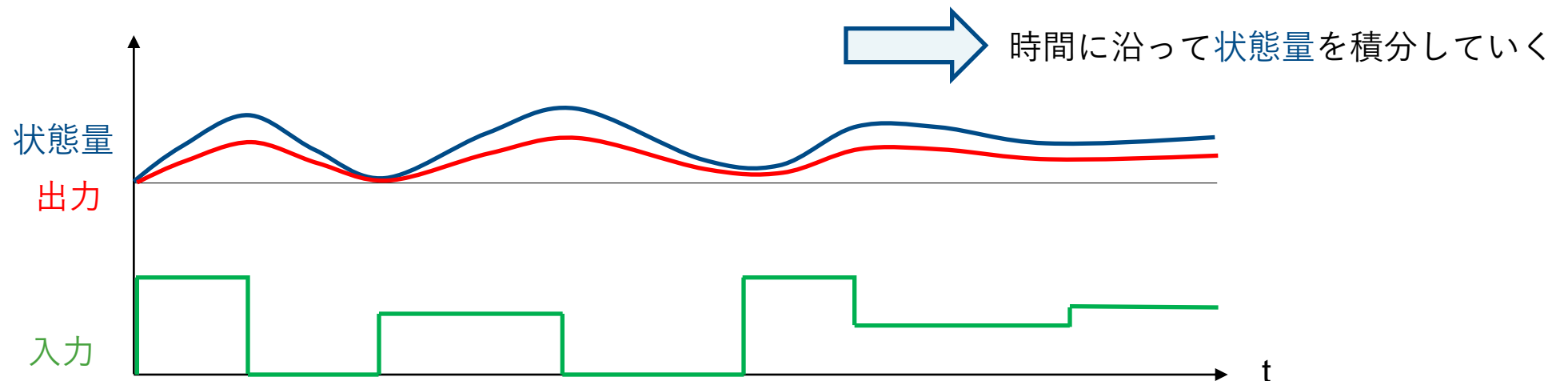
回転型倒立振子の運動を常微分方程式（ODE）として立式し、時間の発展と共に状態、出力が変化する様を再現する

状態方程式：

$$\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{状態量の変化量}} = f(\underbrace{x(t)}_{\text{状態量}}, \underbrace{u(t)}_{\text{入力}})$$

出力方程式：

$$\underbrace{y}_{\text{出力}} = h(x(t), u(t))$$



回転型倒立振子の運動方程式とは？

状態量

$$\mathbf{x} = [\theta \ \varphi \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi}]^T$$

入力

$$u = \tau$$

出力

$$\mathbf{y} = [\theta \ \varphi]^T$$

立式

状態方程式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \tau(t))$$

\int

出力方程式：

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix}$$

💡 Check

- ✓ 状態量の選び方は対象に寄りけり
- ✓ 状態量 = 出力のケースもあり

入力から各状態量への変化がどう表現されるのかを物理法則に則って記述する

Ex. ニュートンの運動方程式 $F = m \times a$

運動方程式の導出

明示的なモデリングアプローチの1つ

ニュートンの力学 $m\ddot{x} = F$ をより一般化したい
エネルギーに着目すれば良いのでは？

ラグランジュの運動力学

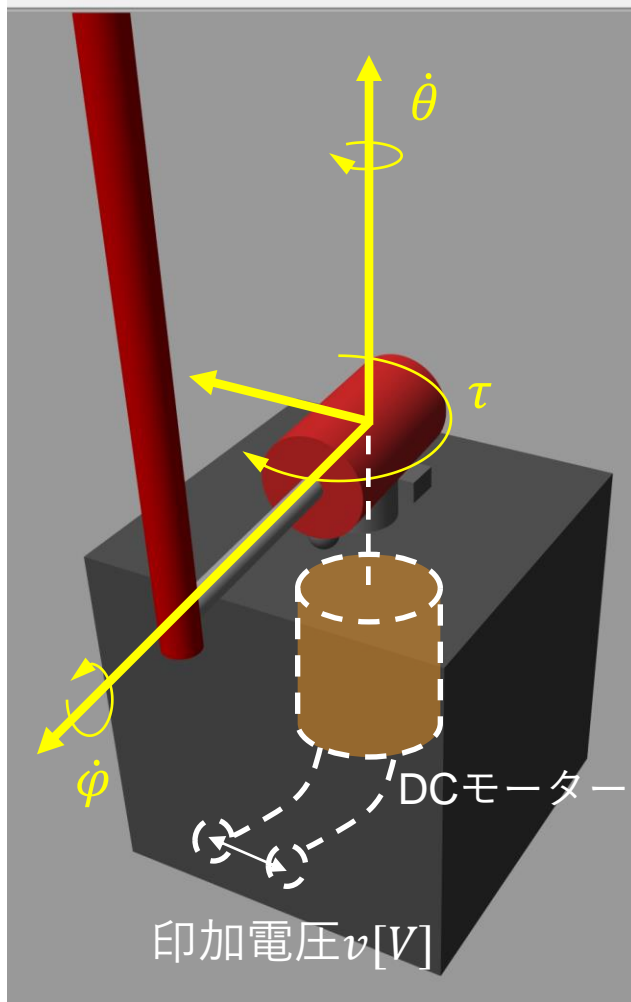
- ◆ フランスの物理学者 ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ によって考案された解析力学の体系
- ◆ 系を記述するラグランジアン関数 \mathcal{L} を導入し、運動エネルギー K と位置エネルギー P の差分として定義する

$$\mathcal{L} = K - P$$

- ◆ 系の運動は \mathcal{L} を「変分原理」に従って変分することで求められる
自然界に起こる現象はその現象が関係する"何かある積分"が極大/極小になるような経路で起こる
- ◆ 一般化座標 q_i （系の運動を記述する任意の変数）を導入し、その時間微分である \dot{q}_i と共に変分原理に基づいてラグランジアン \mathcal{L} の変分を解くことで運動方程式を得る

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \underbrace{\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}}_{\text{散逸項}} = \underbrace{f_i}_{\text{一般化力 (系への入力)}} \quad i = 1, \dots, N$$

回転型倒立振子の運動方程式の再確認



状態量

$$\mathbf{x} = [\theta \ \varphi \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi}]^T$$

入力

$$u = v$$

出力

$$\mathbf{y} = [\theta \ \varphi]^T$$

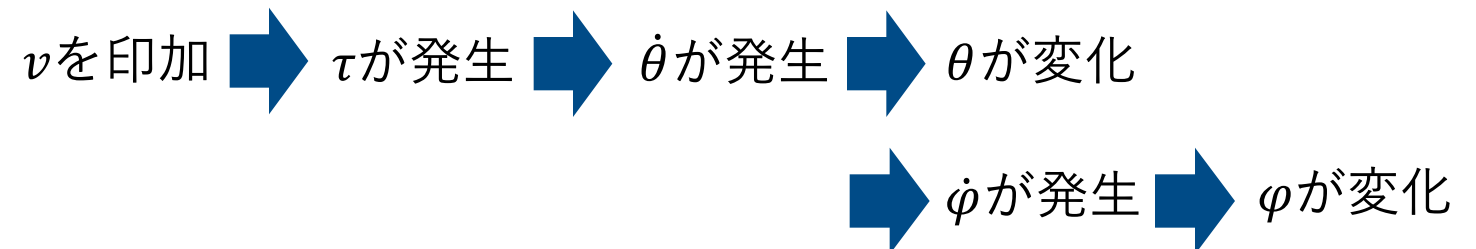
状態方程式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))$$

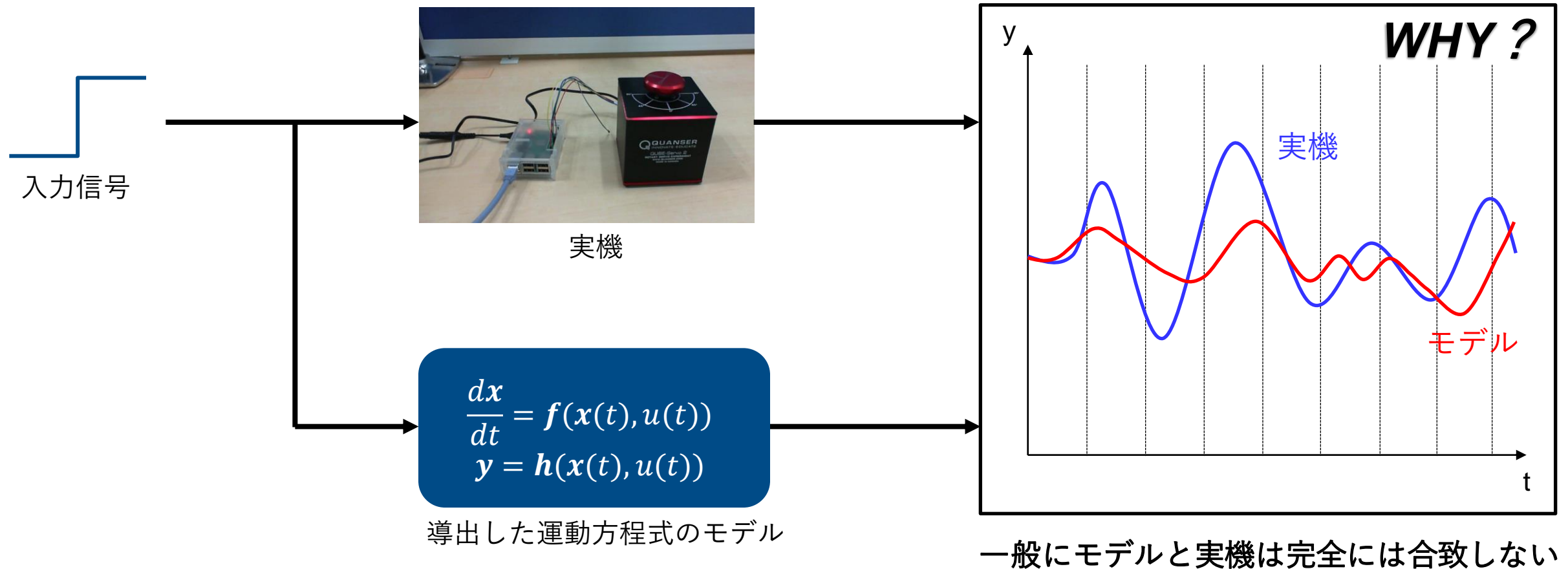
出力方程式：

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix}$$

運動の流れ



モデルと実機の乖離問題



Ans: モデル化に伴って考慮がされていない要素や不確定なパラメーターがあるから



実機のデータをリファレンスにモデルの精度を改善する必要がある

データを活用し、プラントモデルの精度を向上する

入力

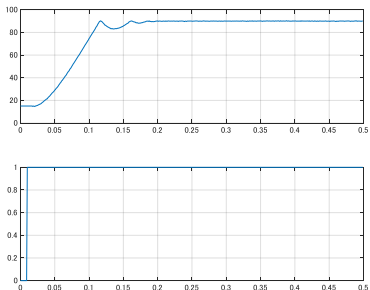
パラメーター指定

モデルパラメーター
(ワークスペース変数)

名前	値
c	40
input_delay	0.0200
J	0.0500
k	1

時系列データ

実機/詳細モデルデータ
(合わせ込み用/妥当性確認用)



パラメーター推定器
Simulink Design Optimization

GUI or 関数

自動推定

プラントモデル

出力

推定結果

- パラメーター値
- 応答波形可視化
- 推定進行状況レポート

名前	値
c	8.9080
input_delay	0.0099
J	0.2264
k	18.5707

使いどころ

- 所有するモデルの精度を高め、解析・設計の精度を向上

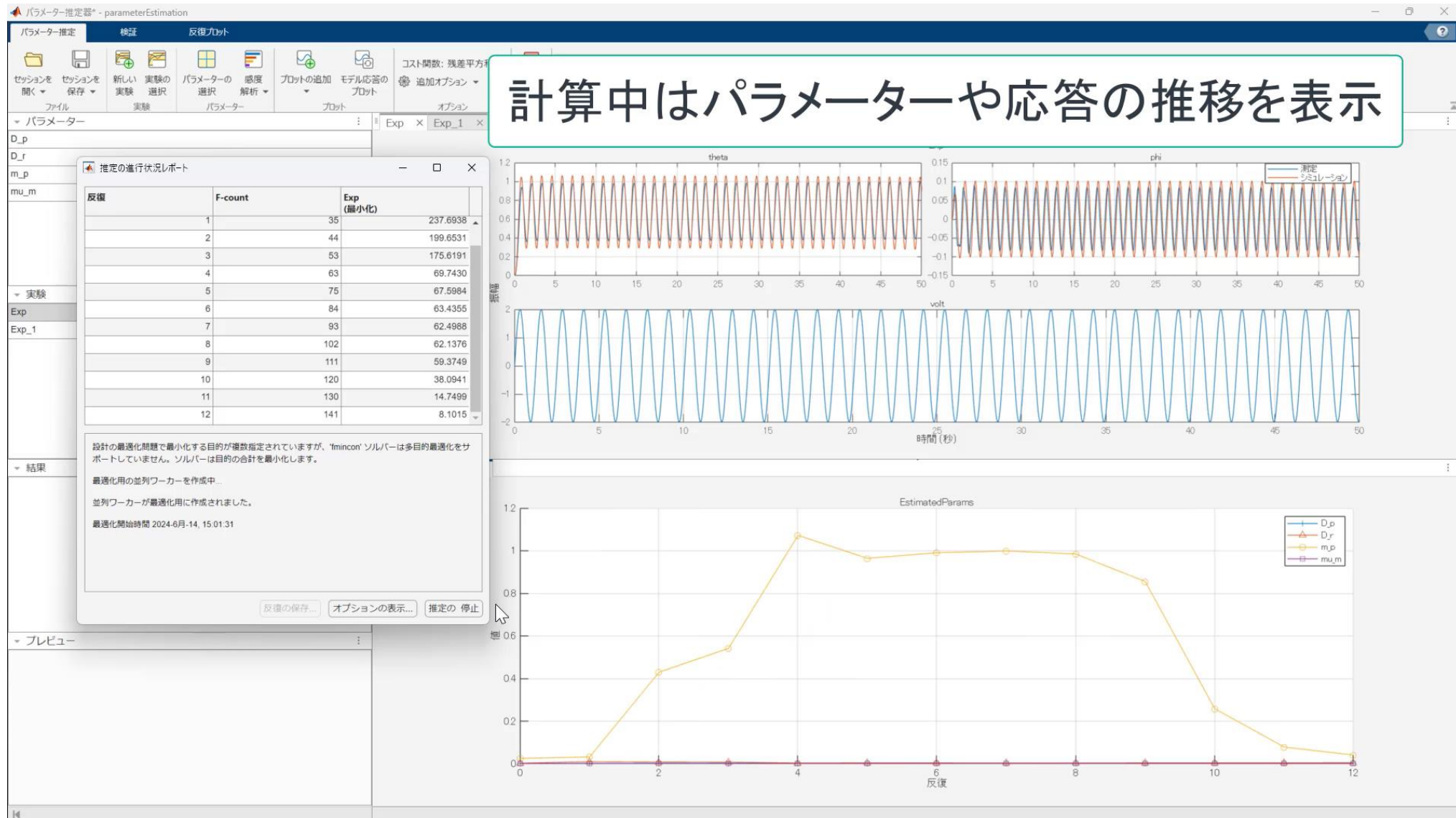
高速リスタート、並列化にも対応

数値最適化技術

Optimization Toolbox

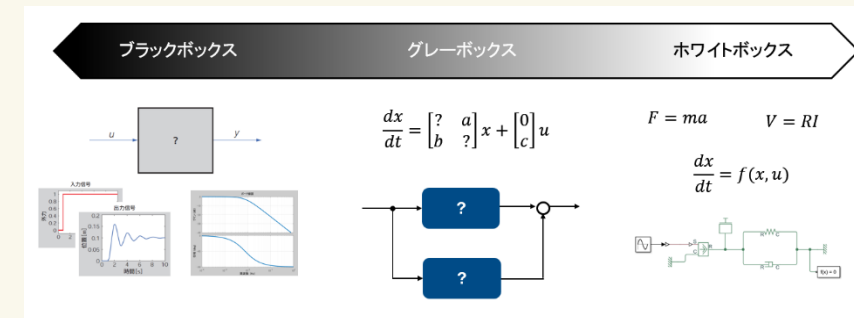


パラメーター推定の様子



セクションのまとめ

- プラントモデリングは現実のシステムを机上のバーチャル環境で模擬し、シミュレーションによって解析、設計、評価するための手段。
- モデリングのパターンとして、データから完全に推定する方法や原理式、物理法則から明示的に導出する方法、そしてその中間がある。



- 複雑な方程式の導出において、数式処理ツールを使用すると便利なケースがある。
- 一般に実機とモデルの応答が完全に合致することはない。モデルの精度を改善するためにデータからパラメーター推定を行うことができる。

参考文献

- 兵頭 俊夫 著：考える力学, p.267-298, 学術図書出版社, 2001.
- 川田 昌克 編著 他：倒立振子で学ぶ制御工学, p.37-59, 森北出版株式会社, 2017.

Agenda

1. MBDとは？
2. 実例紹介：プラントモデリングのコツを教えます
- 3. 現代制御理論を使った制御系設計**
4. 自動コード生成と、マイコンへの機能実装について解説

本セッションでお話する内容

要求

システム
設計

機能
設計

SW
基本設計

SW
詳細設計

メカ

エレキ

ソフト

量産コード自動生成

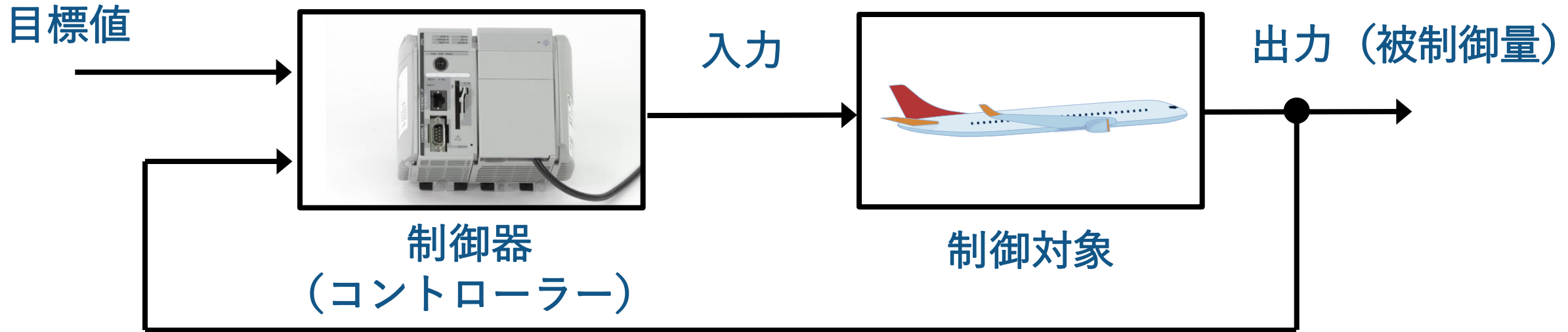
目的

プラント（倒立振子）の数式モデルおよびパラメーターを使って、与えられた制御要求を実現するための制御器（コントローラー）の設計を行う

アウトプット

- 制御器のパラメーター
- 制御器のSimulinkモデル

制御って結局なに？

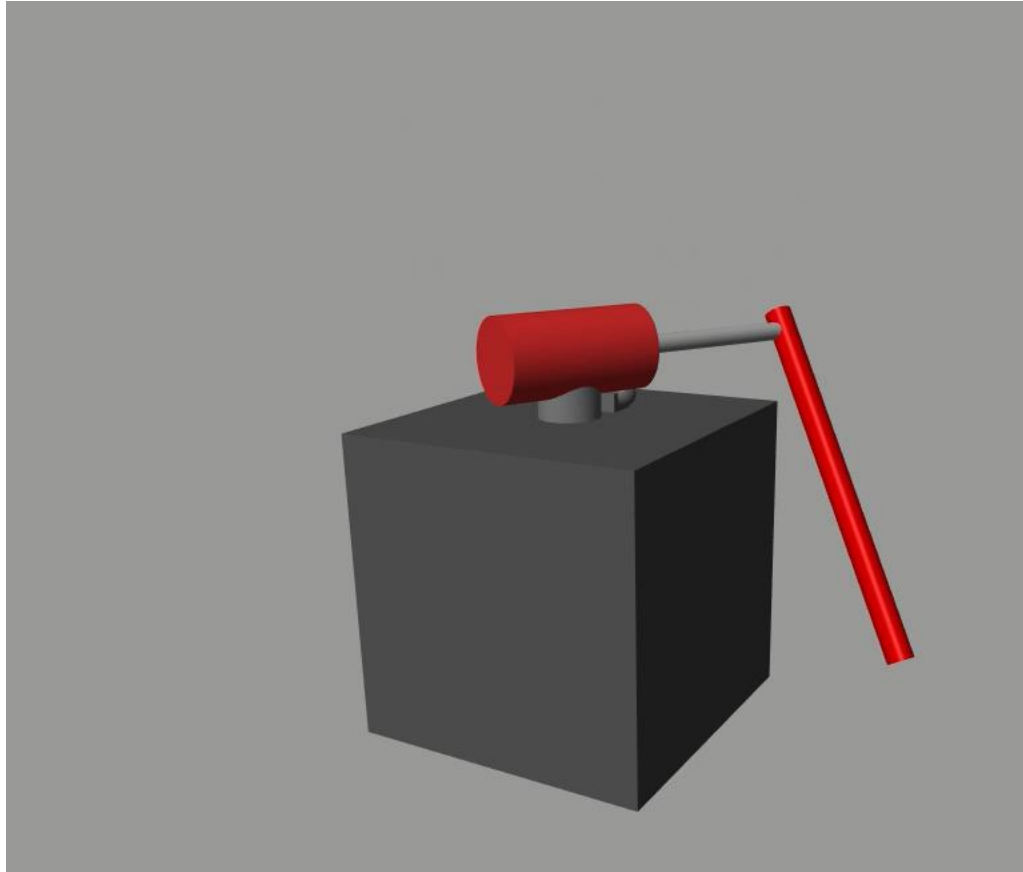


制御する対象を人の意に沿うよう制し、御す（操る）こと

制御がなければ、、、

- 対象は勝手に動く or 全く動かない = 人が期待するナニカを得ることはできない
- 時にシステムが不安定に陥り、暴走する
- なりゆき任せ

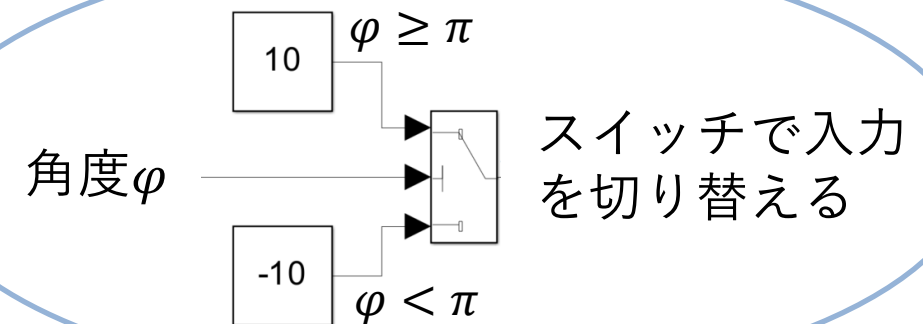
制御を工学として極めるための学問 それが“制御工学”



ON/OFF制御によって倒立制御を行った例
(適当にやっても制御はできない)

制御工学が目指すのは

制御対象の特性を理解し、与えられた制御要求を最大限実現する制御器（コントローラー）を合理的に設計できるようにすること



What is 現代制御理論？

- ◆ **現代制御理論** (Modern Control Theory) は1960年代に制御工学者 **ルドルフ・カルマン** によって理論体系が確立された代表的な制御理論の一つ

～特徴～

- 制御対象を**線形な**状態空間システムとして表現する

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

- **古典制御理論**ではラプラス変換(s)による複素変数間の代数関係 (伝達関数) でシステム表現を行っていた点に対し、現代制御理論では**時間領域＝微分方程式**のままシステムを取り扱い、安定性の解析や制御系の設計を行う
- カルマンフィルター、極配置法、最適レギュレーター (LQR) などの代表的な制御手法が登場
- 当時、NASAのアポロ計画にてカルマンフィルターが採用され、宇宙探査技術を飛躍的に向上させた

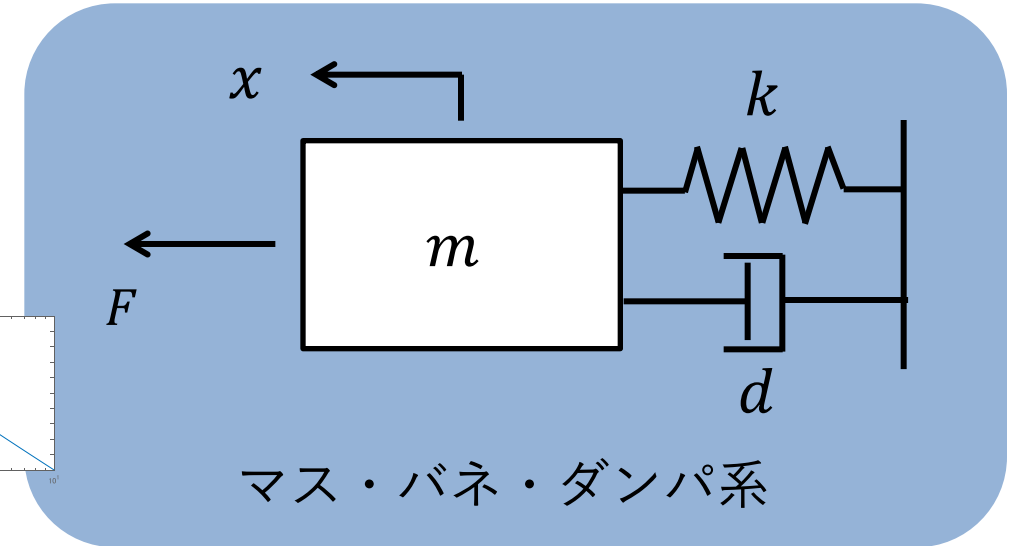
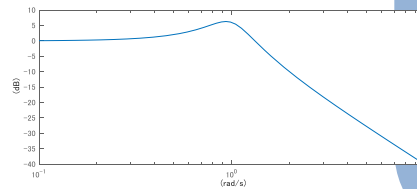
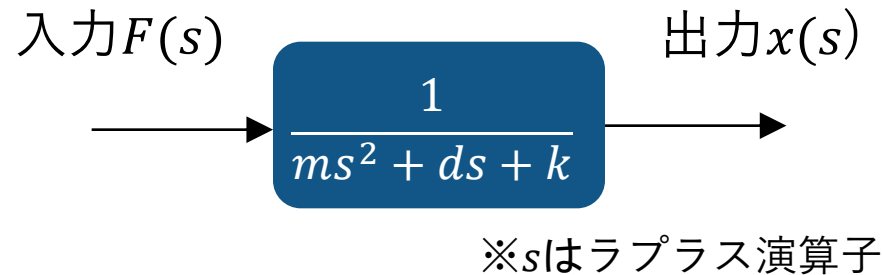
現代制御理論のメリット

- ✓ 多入出力系 (MIMO) の取扱い
- ✓ 最適性を考慮した制御系設計



伝達関数と状態空間による表現の違い

◆ 古典制御理論でのシステム表現



◆ 現代制御理論でのシステム表現

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

※ \dot{x} は dx/dt の意

- 古典制御は1つの入出力間の関係性を伝達関数として表現し、周波数応答をベースに解析、評価する
- 現代制御では、システムの振る舞いを記述するために内部状態（状態量）も考慮し、微分方程式をベースに解析、評価する

非線形システムと線形システム

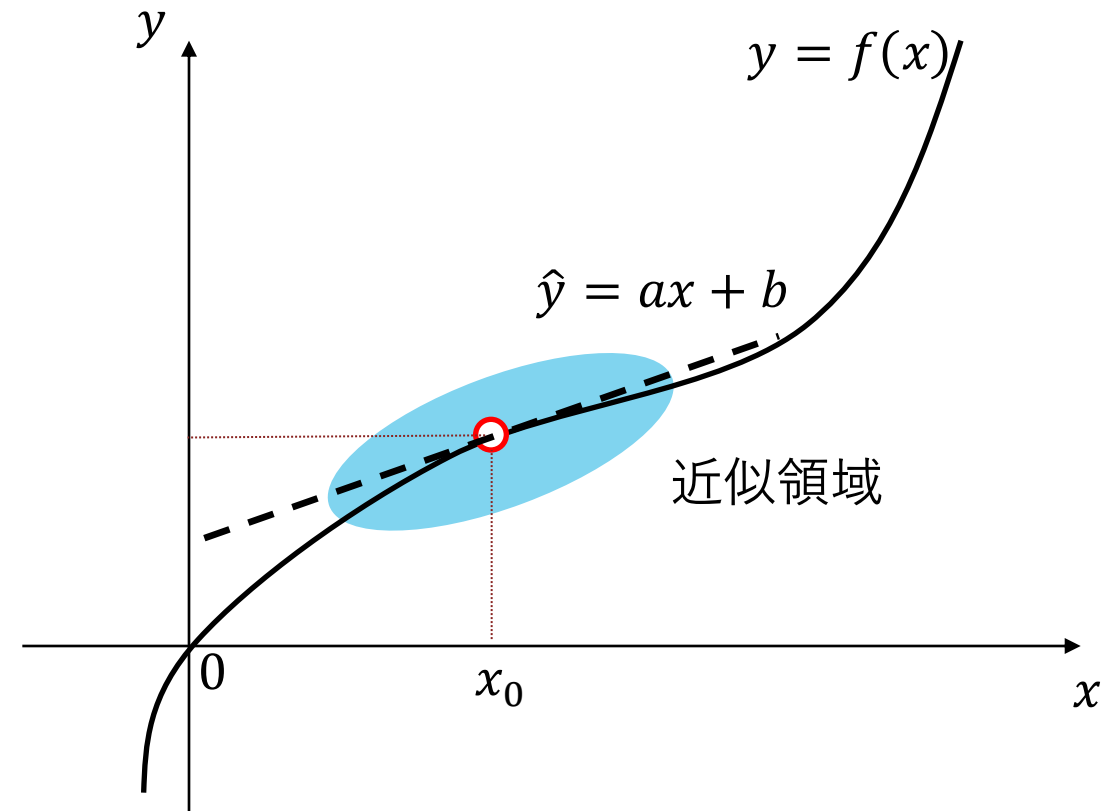
世の中の大半のシステムは非線形システム



非線形性をそのまま扱うのは難しい



線形近似して扱いやすくする



線形近似とは…

ある任意の一点における接線を引いた際の傾きと切片により特性を近似する手法のこと

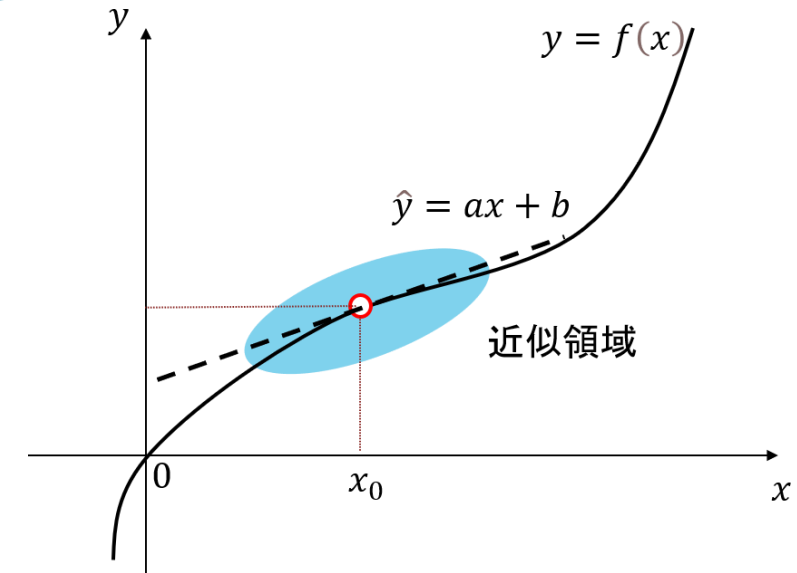
テイラー展開

ちなみに、 $x_0 = 0$ の場合はマクローリン展開という

テイラー級数展開

ある点 x_0 を基準としたテイラー級数展開は、、、

$$y \cong f(x_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0}}_{\text{1次の偏微分
ヤコビアン}} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \Big|_{x_0}}_{\text{2次の偏微分
ヘシアン}} (x - x_0)^2 + \dots$$



2次以上は微小と仮定して無視すると、、、

$$y = \boxed{f(x_0)} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0}} (x - x_0)$$

切片 傾き

おきなおすと

1次関数として近似される

$$y = b + ax$$

$$a: \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} \quad b: f(x_0) \quad x: (x - x_0)$$

ヤコビアン計算

➤ $x \in \mathbf{R}^n, f \in \mathbf{R}$ の場合

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

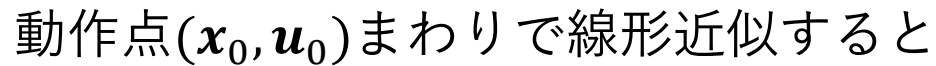
➤ $x \in \mathbf{R}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^m$ の場合

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x} \end{bmatrix}$$

➤ $x \in \mathbf{R}^n, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^m$ の場合

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

状態方程式 : $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ \mathbf{x} : 状態
出力方程式 : $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ \mathbf{u} : 入力
 \mathbf{y} : 出力



$$y(t) \cong h(x_0, u_0) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x_0, u_0}}_{C(x_0, u_0)} (x - x_0) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{x_0, u_0}}_{D(x_0, u_0)} (u - u_0) + \cancel{O(x, u)^2 + \dots}$$

A, B, C, D は動作点
(基準点)に依存
して決まる定数

制御の世界における線形近似とは

線形近似のつづき

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$$

微小変化量として以下を考えると、、、

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \quad \Delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_0 \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$$



$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \Delta \mathbf{u}(t)$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \Delta \mathbf{u}(t)$$

Δを省略すれば

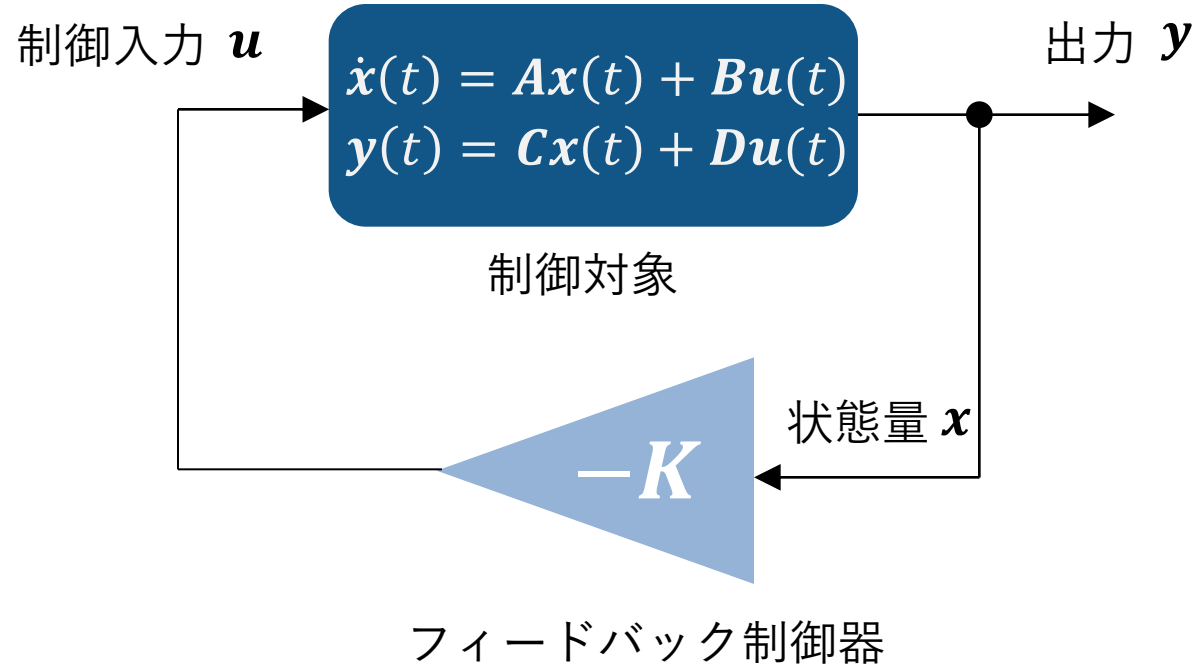


線形システム

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

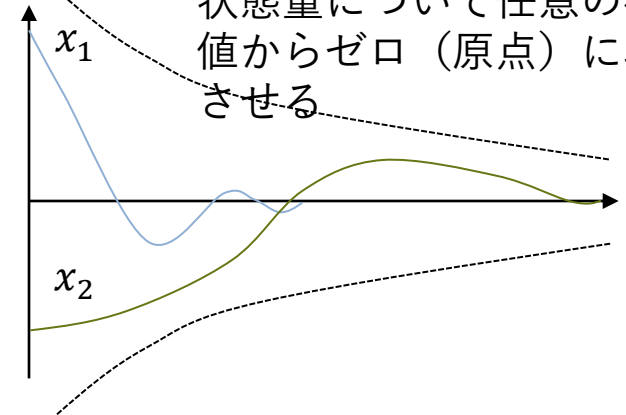
線形システムはある動作点 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ 回りの変化量Δの特性を表している

現代制御理論に基づくフィードバック制御器の設計



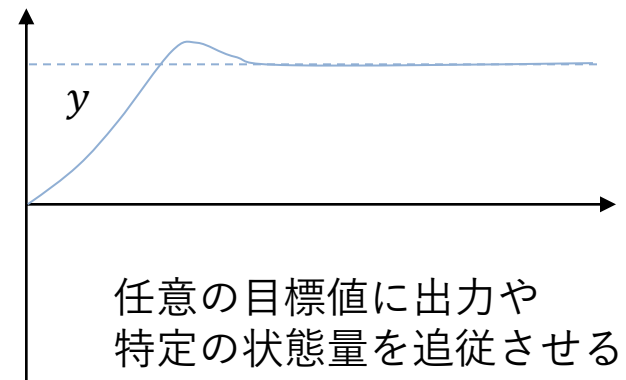
レギュレータ問題

状態量について任意の初期値からゼロ（原点）に収束させる



サーボ問題

任意の目標値に出力や特定の状態量を追従させる



現代制御理論ではシステムの状態空間表現に基づき、各状態量の極(*)が安定となるようなフィードバック制御器を設計する

(*)極とは制御対象のシステム行列Aの固有値に関連する特性であり、極の実部が負ならばシステムは安定である

状態空間表現の解析解
$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

状態フィードバック制御によるシステムの安定化

制御対象：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

フィードバック制御器：

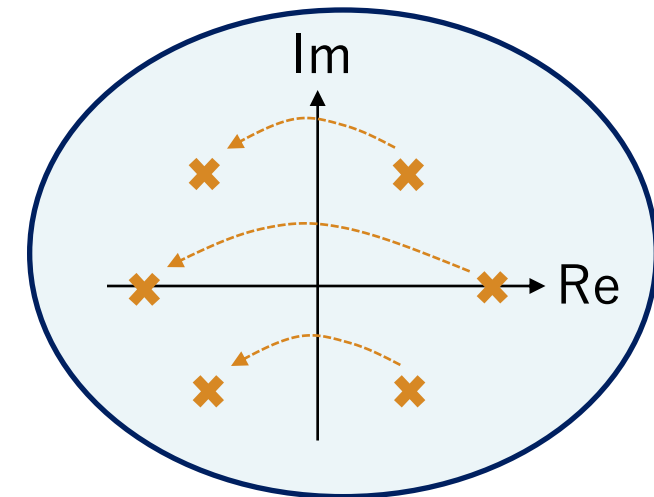
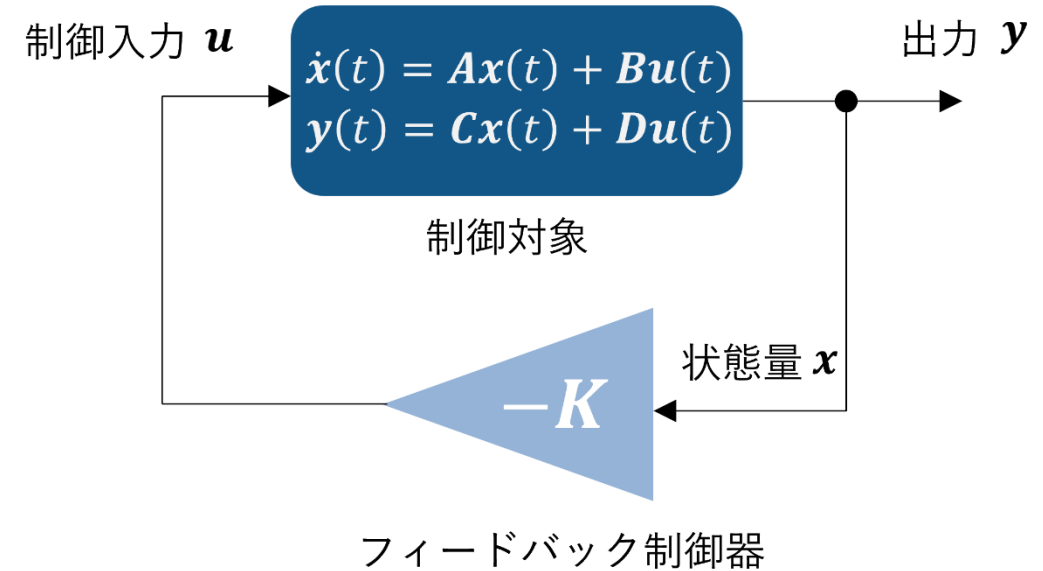
$$u = -Kx$$

静的なフィードバックゲイン

閉ループシステム：

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

フィードバックゲイン K によって閉ループシステムの極を移動させ、安定化する



最適レギュレーター (LQR) . . . 2次の評価関数 (LQ) を最小化 (Regulation) する 最適な入力を生成する

制御対象：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases}$$

評価関数：

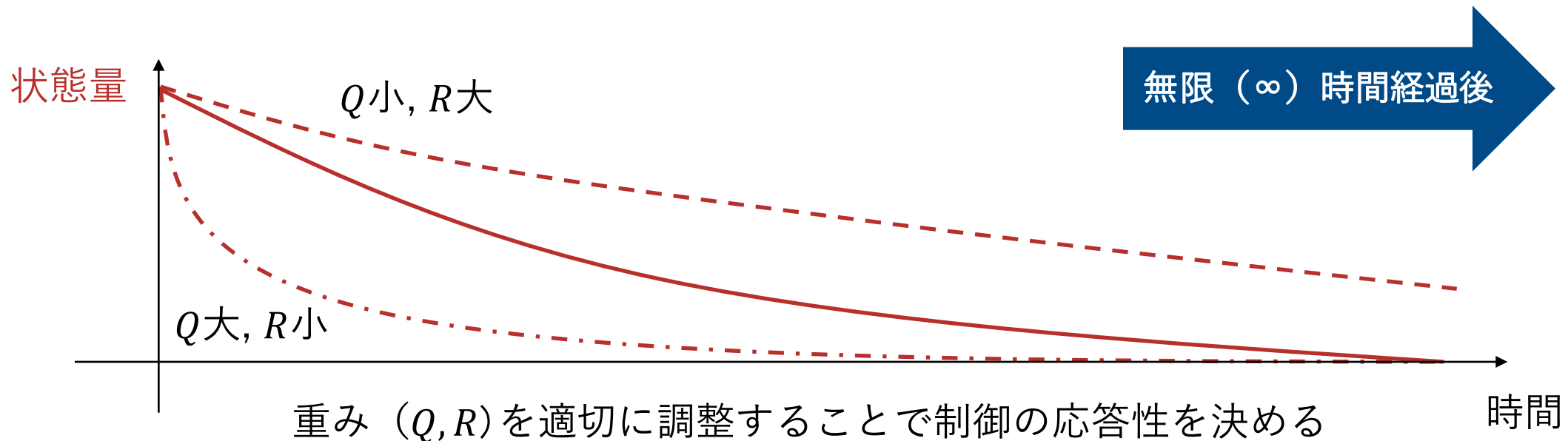
$$\min_u J = \int_0^{\infty} (\underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}_{\text{状態量}} + \underbrace{\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}}_{\text{入力}}) d\tau \quad \text{2次形式 (Linear Quadratic)}$$

コントローラー：

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$$

Q ：状態量に関する重み（調整パラメーター）

R ：制御入力に関する重み（調整パラメーター）



最適レギュレーター (LQR)

制御対象：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

評価関数：

$$\min_{\mathbf{u}} J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) d\tau$$

\mathbf{Q} ：状態量に関する重み（調整パラメーター）

\mathbf{R} ：制御入力に関する重み（調整パラメーター）

コントローラー：

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

評価関数を最小とするフィードバックゲイン $\left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{K}} = 0\right)$ を最適性の原理（リカッチ方程式）から導出

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$$

閉ループ系： $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$

LQRの設計条件

システムは可制御（A,B）であることが必要



制御入力をつかって全状態を任意に制御できること
MATLABではctrb関数で可制御性を確認できる

回転型倒立振子の倒立制御

※ Δ は動作点からの偏位を表す

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad \Delta u = u - u_0 \quad \Delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_0 \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$$

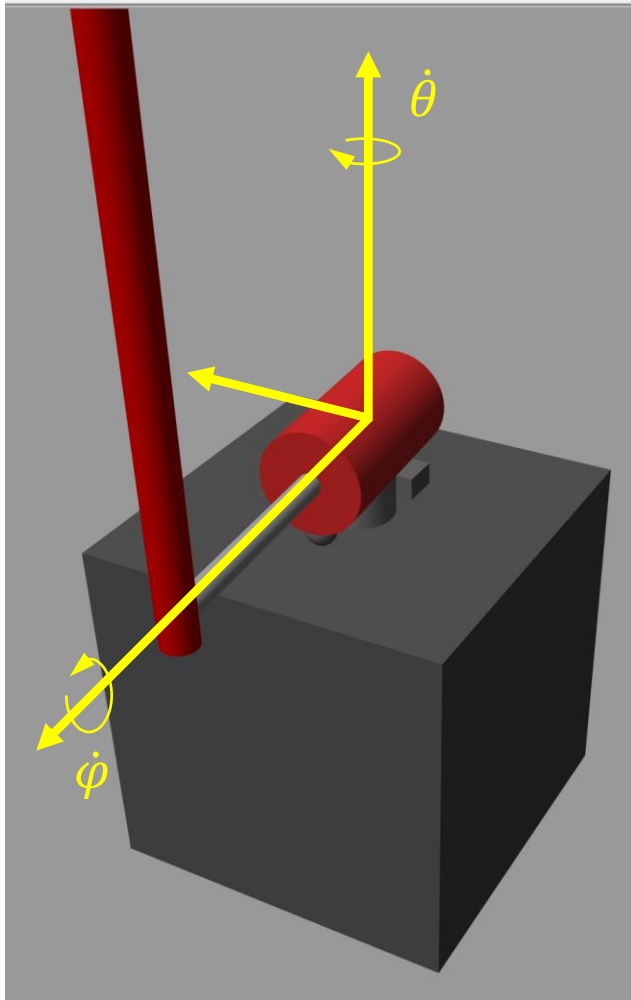
(線形な) 制御対象：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \varphi \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta u(t) \\ \Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \Delta u(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, u_0} \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_0, u_0} \\ \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, u_0} \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_0, u_0} \end{array}$$

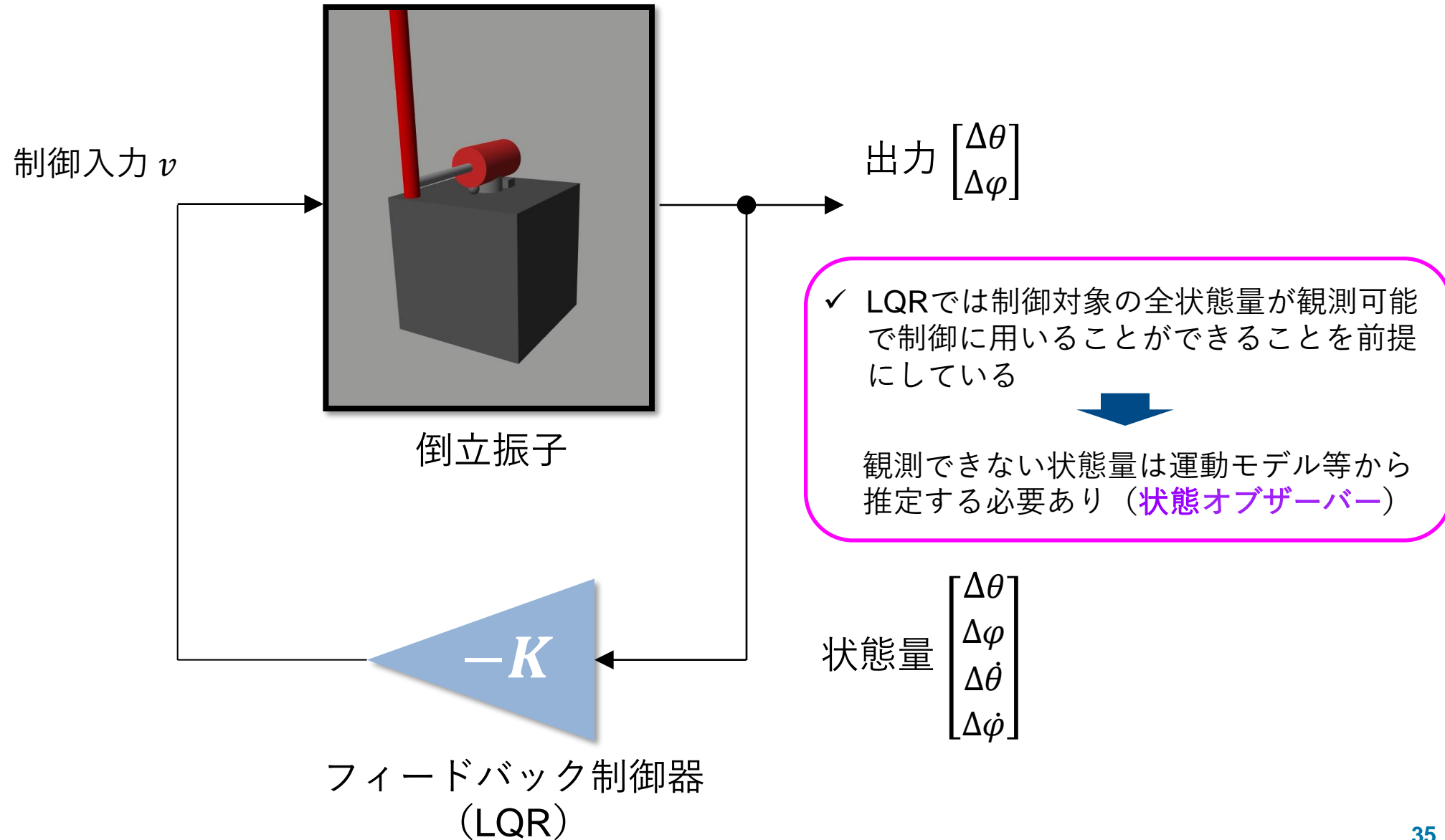
動作点 (\mathbf{x}_0, u_0) は振子が真上にある状態 $\varphi = \pi$ での平衡状態を仮定

～制御への要求～

フィードバック制御器 (LQR) は、いかなる外乱が発生しても常に振子を真正面に向け倒立状態を維持できること

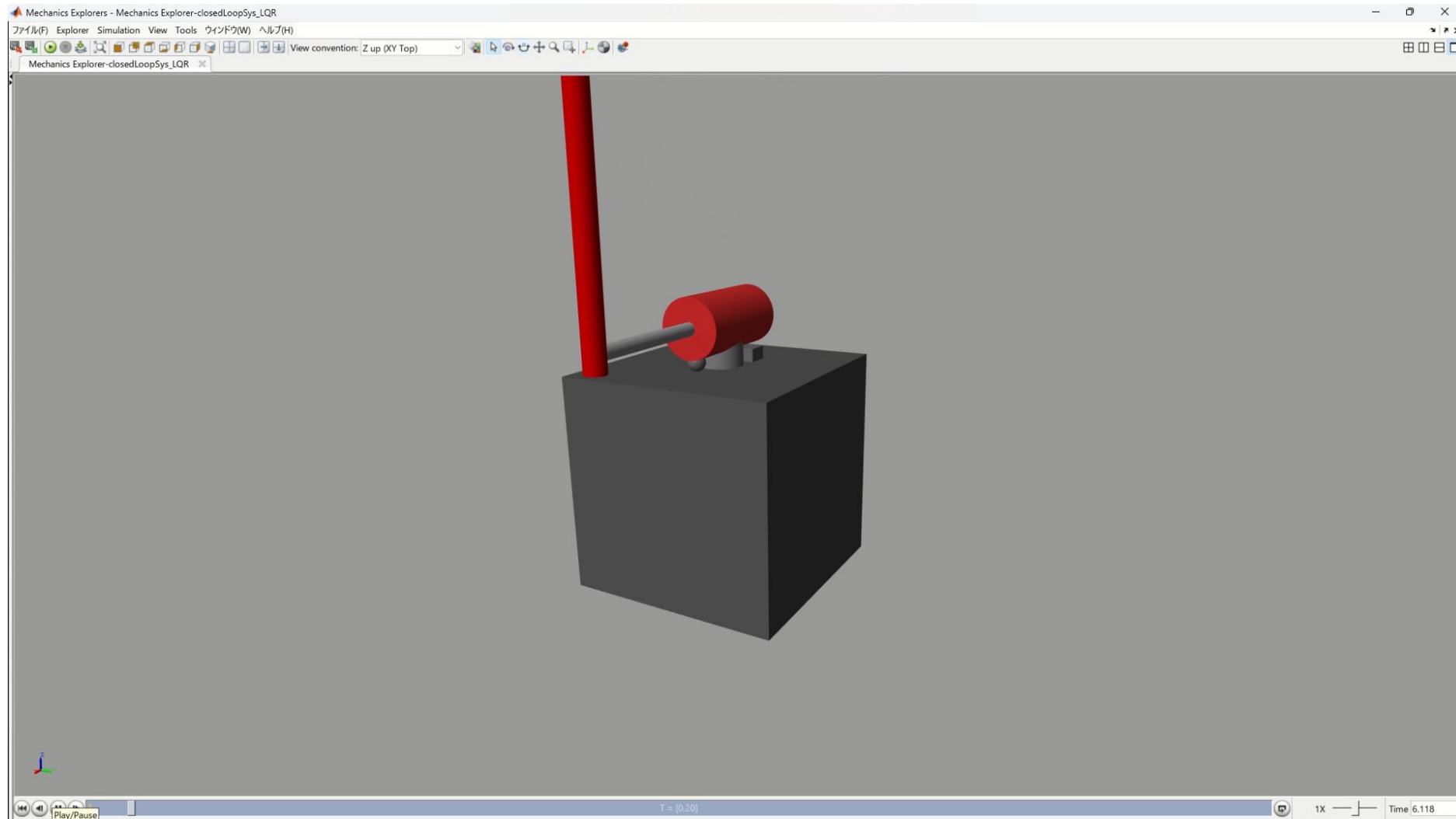


倒立制御のためのフィードバック制御システム



シミュレーションの様子

- 振子の初期角を170[deg]からスタート
- センサー計測値にノイズの影響を考慮



セクションのまとめ

- 制御工学とは制御する対象を解析し、制御要求を達成するための制御器（コントローラー）を合理的な方法で設計するための学問である
- 現代制御理論はカルマン博士によって導かれ、その成果は科学技術の進歩に大きく貢献した
- 現代制御理論は線形な状態空間システムに対する制御器の設計や解析、評価手段を提供する
- 数式処理ツールを活用して線形近似を行うことができ、制御系ツールを活用してLQRのような現代制御理論ベースのコントローラーを設計することができる
- 設計したコントローラーはSimulinkのブロックとして実装し、詳細な非線形シミュレーションを通じて評価する

参考文献

- 小郷 寛、美多 勉 著：システム制御理論入門, 実教出版株式会社, 1979年.